

有限数据条件下边坡可靠度分析的 Bootstrap 方法

唐小松^{1,2}, 李典庆^{1,2}, 曹子君^{1,2}, 周创兵^{1,2}, 方国光^{1,2}

(1. 武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 武汉大学 水工岩石力学教育部重点实验室, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 基于 Bootstrap 抽样技术提出了有限数据条件下边坡可靠度分析方法。简要介绍了传统的边坡可靠度分析方法。采用 Bootstrap 方法模拟了抗剪强度参数概率分布函数的统计不确定性。以无限边坡为例研究了抗剪强度分布参数和分布类型不确定性对边坡可靠度的影响规律。结果表明: 基于有限数据估计的样本均值、样本标准差和 AIC 值具有较大的变异性, 这种变异性进一步导致了抗剪强度参数概率分布函数存在明显的统计不确定性。在考虑抗剪强度参数概率分布函数的统计不确定性时, 边坡可靠度指标应为具有一定置信度水平的置信区间, 而不是传统可靠度分析中的固定值。边坡可靠度指标的置信区间变化范围随安全系数的增加而增大, 同时考虑分布参数和分布类型不确定性计算的可靠度指标具有更大的变异性 and 更宽的置信区间变化范围。Bootstrap 方法为有限数据条件下抗剪强度参数概率分布函数统计不确定性的模拟以及边坡可靠度的评估提供了一条有效的途径。

关 键 词: 边坡; 可靠度; 抗剪强度参数; 概率分布函数; 统计不确定性; Bootstrap 方法

中图分类号: TU 457

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2016)03-0893-10

A Bootstrap method for analyzing slope reliability based on limited shear-strength parameter data

TANG Xiao-song^{1,2}, LI Dian-qing^{1,2}, CAO Zi-jun^{1,2}, ZHOU Chuang-bing^{1,2}, PHOON Kok-kwang^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China;

2. Key Laboratory of Rock Mechanics in Hydraulic Structural Engineering, Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

Abstract: A slope reliability analysis method based on limited shear-strength parameter data is proposed by adopting the Bootstrap sampling method. The traditional method of slope reliability analysis is first introduced briefly, and then the Bootstrap method is adopted to model the statistical uncertainty in probability distributions of shear strength parameters. An example of the infinite slope is given, the influence of the distribution parameters of shear strength and the uncertainty of distribution type on the reliability of the slope is studied. The results indicate that the sample mean, sample standard deviation and AIC values derived from the limited data of shear strength parameters show a large variability. This variability further aggravates the statistical uncertainty in the probability distributions of shear strength parameters. By considering the statistical uncertainty in the probability distributions of shear strength parameters, the reliability index of a slope is presented as a confidence interval instead of a single, fixed index derived from a classical reliability analysis. The range of this confidence interval increases with increasing slope safety factor. Meanwhile, when both the uncertainties in distribution parameters and distribution types of shear strength parameters are taken into account, the reliability index has a higher variability and thus a wider range of confidence interval. The Bootstrap method provides a practical access to modeling the uncertain probability distributions of shear strength parameters and to determining the associated slope reliability with limited data of shear strength parameters.

Keywords: slope; reliability; shear strength parameters; probability distribution function; statistical uncertainty; Bootstrap method

1 引 言

边坡稳定性分析包含多种不确定性因素, 按其

来源一般可以分为岩土体物理力学参数本身固有的不确定性、计算方法中假定引起的模型不确定性以及试验数据有限带来的统计不确定性 3 类。近年

收稿日期: 2014-10-27

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No.51225903, No.51329901, No.51509188); 湖北省自然科学基金项目 (No.2014CFA001, No.2015CFB509)。This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51225903, 51329901, 51509188) and the Natural Science Foundation of Hubei Province of China (2014CFA001, 2015CFB509).

第一作者简介: 唐小松, 男, 1986 年生, 博士后, 主要从事岩土工程可靠度和风险分析方面的研究。E-mail: xstang@whu.edu.cn

通讯作者: 李典庆, 男, 1975 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程可靠度分析与风险控制方面的研究。E-mail: dianqing@whu.edu.cn

来,可靠度理论为考虑上述不确定性因素提供了一条有效的途径^[1-5]。在边坡可靠度分析中,岩土体的抗剪强度参数黏聚力和内摩擦角经常被视为随机变量^[1-5]。为了准确地进行边坡可靠度分析,通常需要已知抗剪强度参数的概率分布函数。一般来说,抗剪强度参数概率分布函数的分布参数由试验数据的样本均值和样本标准差确定,而分布类型则采用各种信息准则如 AIC 准则^[6]识别产生。当试验数据的样本数目无穷大时,由样本均值和样本标准差确定的分布参数以及 AIC 准则识别的分布类型是精确的。然而,实际工程抗剪强度参数试验数据非常有限,基于这些数据计算的样本均值、样本标准差和 AIC 值通常具有较大的变异性^[7],这种变异性直接导致了抗剪强度参数概率分布函数存在明显的统计不确定性。抗剪强度参数概率分布函数的统计不确定性主要包括:(1)样本均值和样本标准差的变异性导致了分布参数的不确定性;(2)不同分布函数计算的 AIC 值的变异性导致了分布类型的不确定性。为了更加合理地评价边坡可靠度,实际工程应该充分考虑有限数据引起的抗剪强度参数概率分布函数的统计不确定性。其关键难点在于已知抗剪强度参数试验数据如何模拟样本均值、样本标准差和 AIC 值的变异性。

由统计学理论可知,当随机变量的总体分布为正态分布时,该随机变量的统计量如样本均值和样本标准差具有显式的抽样分布。然而,实际工程抗剪强度参数的总体分布是未知的,且抗剪强度参数并不总是服从正态分布。此时,抗剪强度参数统计量的抽样分布没有显式表达式。对于这种情况,当样本数目较大时可以采用渐进方法获得统计量的抽样分布。然而,当样本数目较小时该方法会造成较大的误差。近年来在统计学领域应用较多的 Bootstrap 方法^[8]为有限数据条件下统计量分布的直接模拟提供了一种新的工具。Bootstrap 方法的基本思想是通过将原始观测样本数据进行有放回地随机抽样获得大量的与原始观测样本同样本容量的 Bootstrap 子样本,然后基于 Bootstrap 子样本计算统计量的估计值,最终获得统计量的抽样分布。该方法只依赖于给定的原始观测样本数据,不需要对随机变量的实际分布作任何假设和增加新的数据观测,因此,是一种非参数统计方法。Bootstrap 方法最早由 Efron^[8]于 1979 年提出,近年来在岩土工程领域得到了应用^[9-11]。如 Most 等^[9]采用 Bootstrap 方法模拟了抗剪强度参数样本均值和样本标准差的变异性及其对地基承载力可靠度的影响;Luo 等^[10]

利用 Bootstrap 方法研究了有限数据引起的土性参数样本均值和样本标准差变异性对支护开挖失效概率的影响。在国内,谢桂华等^[11]采用 Bootstrap 方法模拟了地基沉降计算经验系数样本均值的分布和置信区间;唐小松等^[7]研究了统计量 AIC 值变异性并提出了基于 Bootstrap 方法的岩土体参数联合分布模型识别方法。

尽管 Bootstrap 方法已被广泛应用于统计量分布的直接模拟,然而现有文献大多只研究了样本均值和样本标准差的变异性^[9-10]。换句话说,目前研究只考虑了岩土体参数概率分布函数的分布参数不确定性,忽略了分布类型不确定性对岩土结构物可靠度的影响。在这些文献中,岩土体参数的分布类型被假定为固定的分布函数如正态分布或对数正态分布^[9-10]。而文献^[7]研究表明,统计量 AIC 值具有较大的变异性,这种变异性对岩土体参数最优概率分布函数的识别具有重要的影响,基于有限数据识别的最优概率分布函数可能不是真实的概率分布。此外,岩土体参数的分布类型对岩土结构物可靠度亦具有明显的影响^[12-14]。因此,实际工程可靠度分析应该充分考虑统计量 AIC 值的变异性及其引起的岩土体参数分布类型的不确定性。本文目的在于提出有限数据条件下边坡可靠度分析的 Bootstrap 方法。为此,首先介绍了传统的边坡可靠度分析方法。其次,将 Bootstrap 方法应用于抗剪强度参数样本均值、样本标准差和 AIC 值变异性的模拟问题。在考虑抗剪强度参数概率分布函数统计不确定性的基础上,将边坡可靠度指标表示为具有一定置信度水平的置信区间。最后,以无限边坡稳定可靠度问题为例证明了所提方法的有效性。

2 传统边坡可靠度分析方法

2.1 无限边坡稳定分析模型

在提出有限数据条件下边坡可靠度分析的 Bootstrap 方法之前,首先介绍传统的边坡可靠度分析方法。为了便于读者理解本文方法,以简单的无限边坡稳定可靠度问题为例证明所提方法的有效性。值得注意的是,本文方法同样适用于复杂的实际工程边坡,选取无限边坡作为算例仅仅是为了方便读者能够重复文中结果。无限边坡稳定分析模型常常应用于浅层滑坡的稳定性评价,它是边坡稳定性分析一种实用的简化模型。对于图 1 所示的无限边坡稳定分析模型,在忽略孔隙水压力的情况下,边坡安全系数 F_s 的计算公式^[15]为

$$F_s = \frac{c}{\gamma_w H \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha} \quad (1)$$

式中： c 、 φ 分别为潜在滑动面上土体的有效黏聚力和有效内摩擦角； H 为潜在滑动面以上土层厚度； α 为边坡倾角； γ_w 为土体总重度。抗剪强度参数是边坡稳定可靠度分析中最敏感的变量，因此，本文仅将 c 和 φ 视为随机变量， c 和 φ 的概率分布函数由试验数据得出。由于边坡几何参数 H 、 α 以及土体总重度 γ_w 变异性小，本文将其视为确定量，其取值分别为 $H = 5$ m、 $\alpha = 35^\circ$ 和 $\gamma_w = 17$ kN/m³。

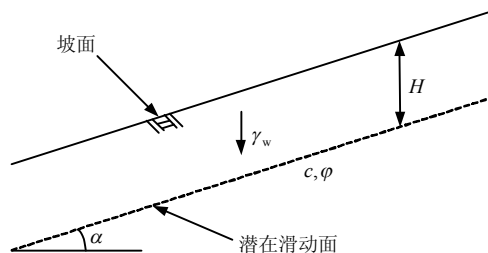


图1 无限边坡稳定分析模型

Fig.1 Stability analysis model of infinite slope

2.2 抗剪强度参数概率分布函数的确定

抗剪强度参数的概率分布函数一般由试验数据得出。本文以文献[16]中新加坡裕廊地区沉积地层的残积土黏聚力和内摩擦角试验数据为例确定抗剪强度参数的概率分布函数。表1给出了24组实测的抗剪强度参数试验数据。由于新加坡国土面积狭小，这些试验数据可以认为是来自新加坡裕廊地区沉积地层残积土抗剪强度参数总体分布的独立同分布观测，从而满足 Bootstrap 方法对试验数据质量的要求。由于残积土通常分布于边坡浅层，而无限边坡稳定分析模型常常应用于浅层滑坡的稳定性评价，因此，所选抗剪强度参数试验数据与边坡稳定分析模型非常吻合。基于上述数据可以计算出抗剪强度参数的样本均值、样本标准差和样本变异系数，结果如表1所示。可以看出，抗剪强度参数具有明显的变异性，且黏聚力 c 的变异性大于内摩擦角 φ 的变异性。

本文采用工程上常用的 AIC (Akaike information criterion) 准则^[6]识别最优的概率分布函数，即具有最小 AIC 值的概率分布函数被认为是拟合试验数据概率分布特性最优的概率分布函数。AIC 值定义为试验数据点处概率密度函数值对数和的负2倍

表1 抗剪强度参数试验数据

Table 1 Test data of shear strength parameters

试验编号	c / kPa	φ / (°)
1	9	33
2	14	30
3	19	25
4	13	32
5	8	36
6	12	31
7	18	29
8	8	33
9	9	30
10	11	29
11	10	35
12	14	31
13	10	37
14	11	33
15	14	29
16	7	35
17	12	33
18	16	31
19	12	34
20	12	34
21	8	35
22	6	38
23	9	32
24	16	31
样本均值	11.580	32.330
样本标准差	3.440	2.960
样本变异系数	0.297	0.092

与2倍概率分布函数的分布参数数目之和，表达式为

$$AIC = -2 \sum_{i=1}^N \ln f(x_i; \boldsymbol{\varepsilon}) + 2k \quad (2)$$

式中： $f(\cdot)$ 为备选概率分布函数的密度函数； $\{x_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ 为试验数据，其中 N 为样本数目； $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为备选概率分布函数的分布参数向量； k 为备选概率分布函数中分布参数的数目。因此，已知抗剪强度参数数据，采用式(2)就可以求出多种备选概率分布函数的 AIC 值，从而识别出拟合试验数据概率分布特性最优的概率分布函数。本文选取边坡工程中常用的正态分布、对数正态分布、极值 I 型分布和威布尔分布作为备选概率分布函数，拟合抗剪强度参数的概率分布特性^[12-14]。为了避免负值，正态分布和极值 I 型分布在 0 处进行左截尾。上述 4 种备选概率分布函数都包含 2 个分布参数，因此， $k = 2$ ，这些分布参数可以利用抗剪强度参数数据的样本均值和样本标准差求出^[12-14]。

表2给出了上述4种概率分布函数计算的 AIC 值。对于黏聚力 c 来说，对数正态分布具有最小的 AIC 值，它是拟合试验数据概率分布特性最优的概

率分布函数。对于内摩擦角 φ 来说, 最优的概率分布函数是正态分布。在实际工程可靠度分析中, 受试验数据样本数目限制, 这种由有限数据得出的最优概率分布函数常常被假定为抗剪强度参数的总体分布。由于没有考虑有限数据引起的统计不确定性, 本文称这种分布为抗剪强度参数的固定概率分布。下面给出基于抗剪强度参数固定概率分布的传统边坡可靠度分析方法。

表 2 不同概率分布函数计算的 AIC 值
Table 2 AIC values associated with various probability distribution functions

分布类型	黏聚力 c	内摩擦角 φ
正态分布	130.36	123.18
对数正态分布	128.81	124.00
极值 I 型分布	129.24	135.86
威布尔分布	130.54	124.01

2.3 传统边坡可靠度分析

边坡失效概率可以采用多种方法如 FORM、SORM、RSM、MCS 等计算。鉴于式 (1) 中的边坡安全系数具有显式表达式, 本文采用直接积分方法计算边坡的失效概率。边坡可靠度分析的极限状态方程 $g(c, \varphi)$ 为

$$g(c, \varphi) = F_s(c, \varphi) - 1 = 0 \quad (3)$$

式中: $F_s(c, \varphi)$ 由式 (1) 计算。根据失效概率的定义可得边坡失效概率 p_f 的计算公式为

$$p_f = \iint_{F_s \leq 1} f_1(c) f_2(\varphi) dc d\varphi \quad (4)$$

式中: $f_1(\cdot)$ 和 $f_2(\cdot)$ 分别为 c 和 φ 的概率密度函数。为便于计算, 将式 (4) 所示的二重积分简化为一重积分:

$$p_f = \int_0^\alpha F_1(\gamma_w H \sin \alpha \cos \alpha (1 - \tan \varphi / \tan \alpha)) f_2(\varphi) d\varphi \quad (5)$$

式中: $F_1(\cdot)$ 为 c 的累积分布函数。除了采用失效概率表示边坡的可靠度水平外, 另一种表示方式就是可靠度指标。边坡可靠度指标 β 与失效概率 p_f 有如下关系:

$$\beta = -\Phi^{-1}(p_f) \quad (6)$$

式中: $\Phi^{-1}(\cdot)$ 为标准正态分布函数的逆函数。因此, 已知抗剪强度参数的概率分布函数, 采用式 (5)、(6) 就可以分别计算边坡的失效概率和可靠度指标。

将 2.2 节中抗剪强度参数的固定概率分布代入式 (5)、(6) 就可以得出边坡的失效概率和可靠度

指标, 结果见表 3。为了进行参数敏感性分析, 将 H 和 α 分别进行递减, H 和 α 的变化直接表示为 F_s 的变化。如当 H 从 5 m 减小到 2.46 m 或 α 从 35° 减小到 28.44° 时, F_s 从 1.2 增加到 1.5。可以看出, 边坡失效概率随安全系数的增加而减小, 可靠度指标则随安全系数的增加而增大。相同的安全系数时, 土层厚度变化对边坡可靠度的影响要小于倾角变化对可靠度的影响。值得注意的是, 已知抗剪强度参数的固定概率分布, 传统边坡可靠度分析方法只能得到失效概率或可靠度指标的单一数值。该数值仅仅考虑了抗剪强度参数本身固有的不确定性, 而没有考虑因试验数据有限引起的抗剪强度参数概率分布函数的统计不确定性。由于抗剪强度参数概率分布函数统计不确定性的存在, 失效概率或可靠度指标的单一数值可能无法反映边坡的真实可靠度。针对上述问题, 本文提出了边坡可靠度分析的 Bootstrap 方法。该方法通过考虑抗剪强度参数概率分布函数的统计不确定性, 得出了边坡失效概率或可靠度指标的概率密度函数, 并将失效概率或可靠度指标表示为具有一定置信度水平的置信区间。下面首先介绍抗剪强度参数概率分布函数统计不确定性的模拟方法。

表 3 传统方法计算的边坡可靠度结果
Table 3 Results of slope reliability calculated by traditional method

安全系数 F_s	土层厚度 H / m	边坡倾角 $\alpha / (^\circ)$	失效概率 p_f	可靠度指标 β
1.2	5.00	35.00	6.15×10^{-2}	1.54
1.3	3.72	35.00	1.61×10^{-2}	2.14
1.4	2.96	35.00	4.08×10^{-3}	2.65
1.5	2.46	35.00	1.03×10^{-3}	3.08
1.2	5.00	35.00	6.15×10^{-2}	1.54
1.3	5.00	32.51	1.25×10^{-2}	2.24
1.4	5.00	30.34	2.08×10^{-3}	2.87
1.5	5.00	28.44	3.09×10^{-4}	3.42

3 抗剪强度参数概率分布函数统计不确定性模拟

确定抗剪强度参数概率分布函数的样本均值、标准差和 AIC 值都是试验数据的函数。基于有限试验数据计算的样本均值、标准差和 AIC 值具有较大的变异性, 这种变异性进一步导致了抗剪强度参数概率分布函数存在明显的统计不确定性。抗剪强度参数概率分布函数统计不确定性包括: (1) 样本均值和标准差的变异性导致了分布参数的不确定性; (2) 不同概率分布函数计算的 AIC 值变异性导致

了分布类型的不确定性。因此,表征抗剪强度参数概率分布函数统计不确定性的关键在于模拟样本均值、样本标准差和 AIC 值变异性。

3.1 Bootstrap 方法

本文采用 Bootstrap 方法模拟样本均值、样本标准差和 AIC 值变异性。该方法通过对原始观测样本数据进行有放回地随机抽样,获得大量与原始观测样本相同样本容量的 Bootstrap 子样本,然后基于 Bootstrap 子样本计算统计量的估计值,最终获得统计量的抽样分布。令抗剪强度参数试验数据为 $X = \{(c_i, \varphi_i), i = 1, 2, \dots, N\}$, 从中有放回地随机抽样 N 次,每次抽取抗剪强度参数的一次观测,从而得到一个与 X 同样样本容量的 Bootstrap 子样本 $B_j = \{B_{1,j}, B_{2,j}, \dots, B_{N,j}\}$, 该抽样过程如图 2 所示。由于是有放回地随机抽样,因此,在 B_j 中抗剪强度参数的某次观测 (c_i, φ_i) 可能出现一次、多次或 0 次。重复上述步骤 N_s 次,即可获得 N_s 个 Bootstrap 子样本。

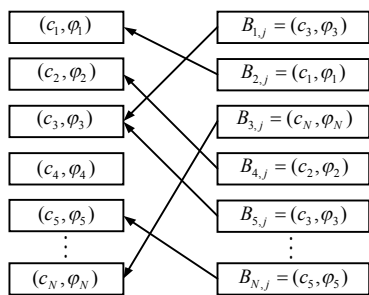


图2 Bootstrap 方法抽样原理示意图

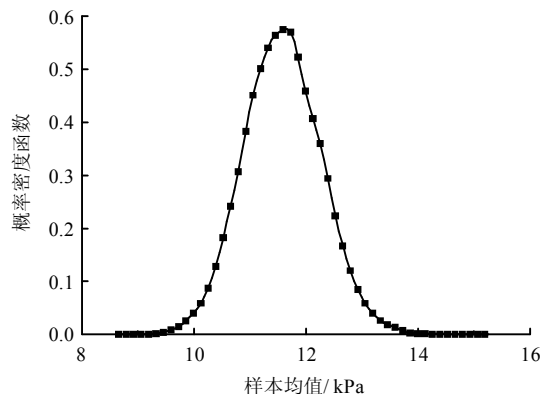
Fig.2 Schematic diagram of sampling principle of Bootstrap method

Bootstrap 方法只依赖于给定的原始观测样本数据,不需要对随机变量的实际分布作任何假设。尽管简单,但该方法的理论依据和良好的收敛性早已被统计学家所证明^[8]。Bootstrap 方法不仅被证明对于大部分统计量满足大样本的相合性,而且对于小样本分析更具有不可替代的优越性。Bootstrap 方法对原始观测样本数据质量有严格的要求,那就是原始观测样本数据是来自同一母体的独立同分布观测。一般来说,为了达到良好的收敛效果,Bootstrap 子样本数目通常取值较大。如文献[10]研究表明, $N_s=10^4$ 时能够保证 Bootstrap 方法模拟的土性参数的样本均值和标准差收敛于总体均值和总体标准差。因此,本文也采用 $N_s=10^4$ 模拟样本均值、标准差和 AIC 值的变异性。基于一个 Bootstrap 子样本可以计算出一组样本均值、样本标准差和 AIC 值, N_s 个 Bootstrap 子样本就可以得到 N_s 组样本均值、标

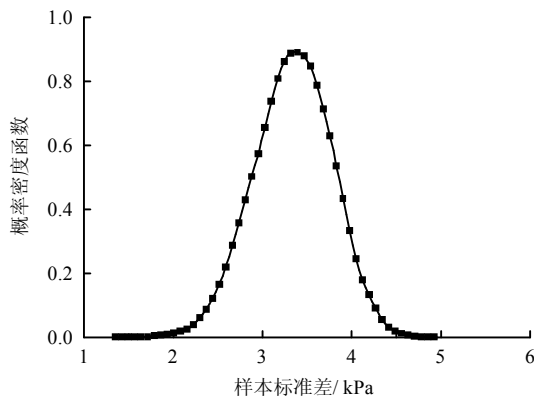
准差和 AIC 值。根据这些数值即可获得样本均值、标准差和 AIC 值的抽样分布以及抽样特性如均值、标准差和变异系数等^[10]。

3.2 基于 Bootstrap 方法的概率分布函数统计不确定性模拟

采用 3.1 节步骤即可模拟样本均值、标准差和 AIC 值的抽样分布和抽样特性。图 3 首先给出了黏聚力 c 的样本均值和标准差的概率密度函数。它们的抽样特性见表 4。可以看出,样本均值和标准差的均值估计与表 1 中基于原始观测数据计算的样本均值和标准差保持了较好的一致性,这说明 Bootstrap 方法有效地继承了原始观测数据的基本信息。此外,Bootstrap 方法还可以模拟样本均值和标准差的变异性。根据它们的标准差和变异系数可以看出样本均值和标准差具有较大的变异性,且样本标准差的变异性要大于样本均值的变异性,这可以由统计学理论得出。样本均值和标准差的这种变异性将导致黏聚力 c 的概率分布函数的分布参数存在不确定性,这是因为分布参数是根据样本均值和标准差直接确定的。



(a) 样本均值



(b) 样本标准差

图3 黏聚力 c 的样本均值和样本标准差概率密度函数
Fig.3 Probability density functions of sample mean and sample standard deviation of cohesive c

同理, 图 4 给出了内摩擦角 φ 的样本均值和标准差概率密度函数。它们的抽样特性如表 4 所示。样本均值和标准差的均值估计与表 1 中基于原始观测数据计算的样本均值和标准差保持了较好的一致性。样本均值和标准差的变异系数分别为 0.018、0.152, 这种变异性将导致内摩擦角 φ 的概率分布函数的分布参数存在不确定性。

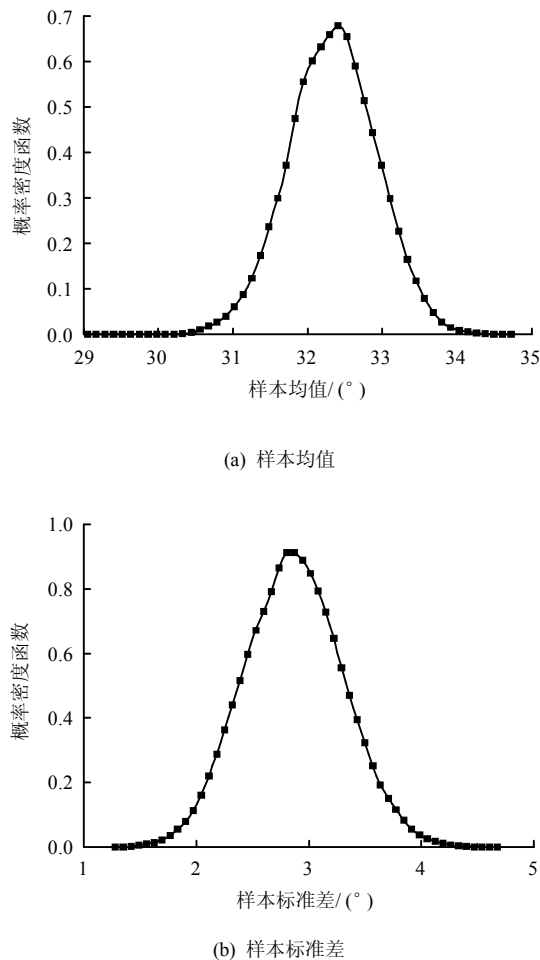


图 4 内摩擦角 φ 的样本均值和样本标准差概率密度函数
Fig.4 Probability density functions of sample mean and sample standard deviation of internal friction angle φ

表 4 样本均值、标准差和 AIC 值的抽样特性
Table 4 Sampling properties of sample mean, sample standard deviation and AIC values

	黏聚力 c			内摩擦角 φ		
	均值	标准差	变异系数	均值	标准差	变异系数
样本均值	11.58	0.68	0.059	32.33	0.59	0.018
样本标准差	3.34	0.43	0.130	2.87	0.44	0.152
正态分布 AIC 值	128.51	6.42	0.050	121.09	7.47	0.062
对数正态分布 AIC 值	127.14	6.45	0.051	121.71	7.96	0.065
极值 I 型分布 AIC 值	127.88	6.57	0.051	131.04	13.52	0.103
威布尔分布 AIC 值	128.76	5.95	0.046	122.54	6.64	0.054

图 5 给出了 4 种备选概率分布函数 AIC 值的概

率密度函数。它们的抽样特性见表 4。可以看出, AIC 值的均值估计与表 2 中基于原始观测数据计算的 AIC 值保持了较好的一致性, 这说明 Bootstrap 方法有效地反映了原始观测数据的基本特性。此外, Bootstrap 方法还可以模拟 AIC 值的变异性。基于有限数据计算的 AIC 值具有较大的变异性, 如对于内摩擦角 φ 来说, 正态分布、对数正态分布、极值 I 型分布和威布尔分布 AIC 值的变异系数分别为 0.062、0.065、0.103 和 0.054。不同备选概率分布函数计算的 AIC 值的这种变异性将导致抗剪强度参数概率分布函数的分布类型存在不确定性。下面进一步分析概率分布函数的分布类型不确定性。

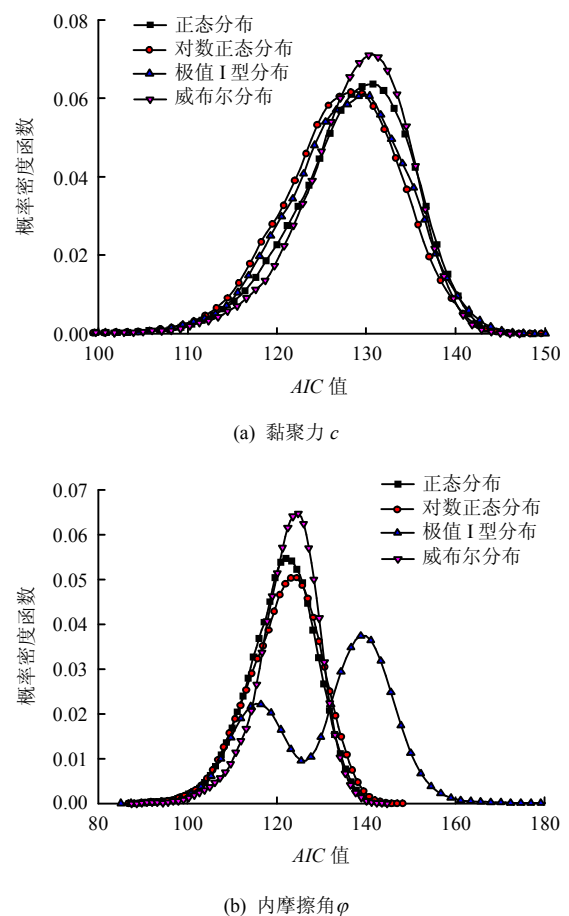


图 5 不同概率分布函数计算的 AIC 值概率密度函数
Fig.5 Probability density functions of AIC values associated with various probability distributions

基于每个 Bootstrap 子样本计算的 4 种备选概率分布函数的 AIC 值即可识别出该子样本的最优概率分布函数, N_s 个 Bootstrap 子样本就可以得到 N_s 个最优概率分布函数。为了表征概率分布函数的分布类型不确定性, 表 5 给出了不同备选概率分布函数被识别为最优概率分布的次数。可以看出, 有限数据条件下没有一种备选概率分布函数能够 100% 地

被识别为最优的概率分布函数。对于黏聚力 c 来说,识别次数最多的概率分布是对数正态分布,这与表 2 中对数正态分布具有最小的 AIC 值的结论相同。然而对于内摩擦角 φ 而言,识别次数最多的概率分布是威布尔分布而不是正态分布。这是因为传统的基于试验数据单一 AIC 值的最优概率分布函数识别方法没有考虑 AIC 值变异性,因而容易给出错误的识别结果^[7]。与传统方法不同,Bootstrap 方法通过模拟 AIC 值的变异性能够有效地得出不同备选概率分布函数为最优概率分布的可能性。如对于黏聚力 c 来说,除去对数正态分布后,其余 3 种备选概率分布函数为最优概率分布的可能性达到了 51.67%。实际边坡可靠度分析应该充分考虑不同备选概率分布函数为最优概率分布的可能性,从而反映分布类型不确定性对边坡可靠度的影响。

表 5 10 000 个 Bootstrap 子样本中不同概率分布函数被识别为最优分布的次数

Table 5 Numbers of times being the best-fit distribution for different distributions over 10 000 Bootstrap samples

分布类型	黏聚力 c	内摩擦角 φ
正态分布	662	3 008
对数正态分布	4 833	1 568
极值 I 型分布	2 361	1 546
威布尔分布	2 144	3 878

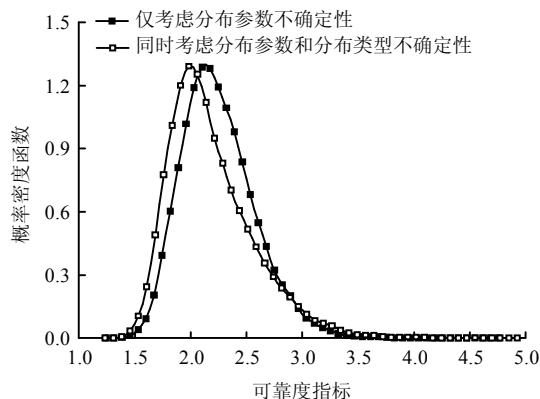
4 基于 Bootstrap 方法的边坡可靠度分析

4.1 仅考虑概率分布函数分布参数不确定性

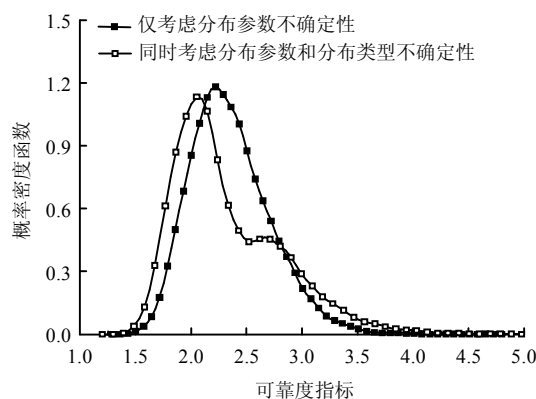
上面采用 Bootstrap 方法模拟了样本均值、标准差和 AIC 值的变异性,从而有效地表征了有限数据条件下抗剪强度参数概率分布函数的统计不确定性。下面进一步给出考虑抗剪强度参数概率分布函数统计不确定性的边坡可靠度分析方法。首先研究抗剪强度参数概率分布函数的分布参数不确定性对边坡可靠度的影响。换句话说,边坡可靠度分析只考虑样本均值和标准差的变异性。对于每个 Bootstrap 子样本,抗剪强度参数概率分布函数的分布参数由该子样本的样本均值和标准差计算,而分布类型则固定为 2.2 节中抗剪强度参数的最优概率分布。基于已知的抗剪强度参数概率分布函数采用式 (5)、(6) 即可计算边坡的失效概率和可靠度指标, N_s 个 Bootstrap 子样本就可以得到 N_s 组失效概率和可靠度指标。根据这些数值即可获得失效概率和可靠度指标的抽样分布和抽样特性。

鉴于可靠度指标的变化范围小于失效概率,本文以下分析都采用可靠度指标表征边坡的可靠度。

图 6 以 $F_s = 1.3$ 为例给出了边坡可靠度指标的概率密度函数。可以看出,边坡可靠度指标基本在 1.5~3.5 之间变化,边坡失效概率的变化范围则超过了 2 个数量级。不同安全系数时可靠度指标的抽样特性见表 6。从表中可以看出,边坡可靠度指标的均值估计与表 3 中传统可靠度分析方法计算的可靠度指标保持了较好的一致性。然而,Bootstrap 方法能够模拟可靠度指标的变异性,这是传统可靠度分析方法所不能比拟的。有限数据条件下边坡可靠度指标具有显著的变异性,且土层厚度变化时可靠度指标的变异性要小于边坡倾角变化时可靠度指标变异性。为了表征可靠度指标的这种变异性,文献[9-10]将可靠度指标表示为具有一定置信度水平的双侧置信区间。基于可靠度指标的概率密度函数可以采用多种方法计算出可靠度指标的置信区间。此外,置信区间又包括双侧和单侧置信区间,实际工程可根据具体设计要求加以选择。为简单起见,本文将可靠度指标的 5%和 95%分位数值分别作为可靠度指标 90%双侧置信区间的上下限,结果如表 6 所示。



(a) $F_s = 1.3$ ($H = 3.72$ m, $\alpha = 35.00^\circ$)



(b) $F_s = 1.3$ ($H = 5.00$ m, $\alpha = 32.51^\circ$)

图 6 边坡可靠度指标概率密度函数

Fig.6 Probability density functions of the reliability index

与传统可靠度分析方法计算的可靠度指标单一数值相比, Bootstrap 方法得出的可靠度指标置信区间能够更加合理地表征边坡的真实可靠度水平。这是因为置信区间不仅能够度量边坡可靠度指标的上下限, 而且能够得到采用单一可靠度指标估计边坡可靠度时的置信度水平。Bootstrap 方法的局限在于为

了保证模拟的可靠度指标的概率分布具有良好的收敛性, 通常需要抽取数目较大的 Bootstrap 子样本。如本文设定 Bootstrap 子样本数目为 10 000, 相应地需要进行 10 000 次边坡可靠度计算, 这对于具有复杂功能函数的边坡可靠度问题来说是一个不小的挑战。

表 6 Bootstrap 方法计算的边坡可靠度指标
Table 6 Reliability indexes of infinite slope using Bootstrap method

安全系数 F_s	土层厚度 H/m	边坡倾角 $\alpha/(^\circ)$	仅考虑分布参数不确定性				同时考虑分布参数和分布类型不确定性			
			均值	标准差	变异系数	90%置信区间	均值	标准差	变异系数	90%置信区间
1.2	5.00	35.00	1.62	0.26	0.159	[1.25, 2.08]	1.62	0.28	0.173	[1.24, 2.13]
1.3	3.72	35.00	2.25	0.33	0.145	[1.78, 2.84]	2.18	0.38	0.173	[1.70, 2.90]
1.4	2.96	35.00	2.78	0.39	0.139	[2.22, 3.47]	2.64	0.47	0.179	[2.06, 3.57]
1.5	2.46	35.00	3.23	0.44	0.136	[2.61, 4.01]	3.03	0.57	0.188	[2.35, 4.16]
1.2	5.00	35.00	1.62	0.26	0.159	[1.25, 2.08]	1.62	0.28	0.173	[1.24, 2.13]
1.3	5.00	32.51	2.36	0.36	0.153	[1.84, 3.01]	2.33	0.49	0.211	[1.74, 3.27]
1.4	5.00	30.34	3.02	0.46	0.151	[2.37, 3.85]	3.00	0.78	0.261	[2.15, 4.51]
1.5	5.00	28.44	3.61	0.55	0.151	[2.84, 4.60]	3.65	1.17	0.320	[2.48, 6.01]

4.2 同时考虑概率分布函数分布参数和分布类型不确定性

下面进一步研究抗剪强度参数概率分布函数的分布类型不确定性对边坡可靠度的影响, 即边坡可靠度分析同时考虑样本均值、标准差和 AIC 值的变异性。对于每个 Bootstrap 子样本, 抗剪强度参数概率分布函数的分布参数由该子样本的样本均值和标准差计算, 分布类型则由该子样本 4 种备选概率分布函数的 AIC 值识别产生。基于已知的抗剪强度参数概率分布函数即可计算边坡的可靠度指标, N_s 个 Bootstrap 子样本就可以得到 N_s 个可靠度指标。根据这些数值即可获得可靠度指标的抽样分布和抽样特性。

图 6 给出了考虑分布类型不确定性时边坡可靠度指标的概率密度函数。可靠度指标的抽样特性和置信区间如表 6 所示。可以看出, 边坡可靠度指标的分布规律与仅考虑分布参数不确定性时相同。然而, 同时考虑分布参数和分布类型不确定性计算的可靠度指标具有更大的变异性以及更宽的置信区间变化范围。这是因为在进行边坡可靠度分析时, Bootstrap 方法充分考虑了不同备选概率分布函数为最优概率分布的可能性, 而传统方法只考虑了 2.2 节中抗剪强度参数的固定概率分布对边坡可靠度的影响。上述结果证明了边坡可靠度分析考虑抗剪强度参数概率分布函数分布类型不确定性的重要性。

为了研究边坡安全系数对可靠度指标置信区间的影响, 图 7 给出了可靠度指标的 90% 置信区间随边坡安全系数的变化曲线。为了比较, 图中还给出

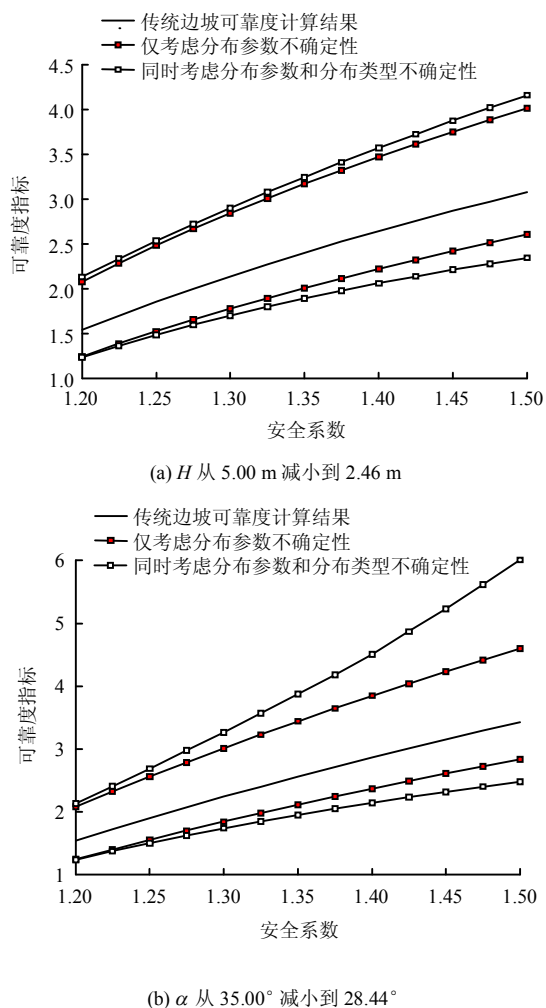


图 7 不同安全系数计算的可靠度指标 90% 置信区间
Fig.7 90% confidence intervals of reliability index for various slope safety factors

了传统方法计算的可靠度指标。边坡可靠度指标

90%置信区间的上下限随安全系数的增加而增加,可靠度指标置信区间的变化范围也随安全系数的增加而增大。传统方法计算的可靠度指标单一数值只能反映边坡的平均可靠度水平,而不能给出可靠度指标的变异系数及其上下限。与其相反,基于 Bootstrap 方法的边坡可靠度分析能够有效地得到可靠度指标的分布和置信区间。这种置信区间不仅能够更加准确地表征边坡的可靠度,而且便于工程设计人员进行边坡的加固设计。这是因为工程设计人员能够方便地看到可靠度指标的上下限随边坡安全系数的变化关系。

5 结 论

(1) Bootstrap 方法能够有效地模拟抗剪强度参数概率分布函数的统计不确定性。通过考虑抗剪强度参数概率分布函数的统计不确定性,边坡可靠度指标可以表示为具有一定置信度水平的置信区间,而不是传统可靠度分析方法的单一指标。Bootstrap 方法为有限数据条件下抗剪强度参数概率分布函数统计不确定性的模拟以及边坡可靠度的评估提供了一条有效的途径。

(2) 基于有限的抗剪强度参数试验数据估计的样本均值、标准差和 AIC 值具有较大的变异性,这种变异性进一步导致了概率分布函数存在明显的统计不确定性。其中,样本均值和标准差的变异性导致了分布参数的不确定性,而不同备选概率分布函数 AIC 值的变异性则导致了分布类型的不确定性。

(3) 抗剪强度参数概率分布函数的统计不确定性对边坡可靠度具有重要的影响。有限数据条件下边坡可靠度指标具有显著的变异性,同时考虑分布参数和类型不确定性计算的可靠度指标具有更大的变异性以及更宽的置信区间变化范围。为了减小边坡可靠度指标的变异性,建议增加抗剪强度参数试验数据的样本数目。

(4) 尽管 Bootstrap 方法只依赖于给定的抗剪强度参数试验数据,该试验数据的质量仍对边坡可靠度计算结果具有重要的影响。为了使得计算的可靠度指标置信区间能够更加合理地表征边坡的可靠度,建议采取合理措施保证抗剪强度参数试验数据是来自同一母体的独立同分布观测。

参 考 文 献

[1] SILVA F, LAMBE T W, MARR W A. Probability and risk of slope failure[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2008, 134(12): 1691—

1699.

- [2] TANG X S, LI D Q, CHEN Y F, et al. Improved knowledge-based clustered partitioning approach and its application to slope reliability analysis[J]. *Computers and Geotechnics*, 2012, 45: 34—43.
- [3] 范明桥, 盛金保. 土强度指标 φ , c 的互相关性[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(4): 100—104.
FAN Ming-qiao, SHENG Jin-bao. Cross correlation of soil strength indexes φ and c [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1997, 19(4): 100—104.
- [4] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 基于 Copula 函数的抗剪强度参数间相关性模拟及边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(12): 2284—2291.
TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Modeling dependence between shear strength parameters using Copulas and its effect on slope reliability[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2012, 34(12): 2284—2291.
- [5] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 不完备概率信息条件下边坡可靠度分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(6): 1027—1034.
TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Reliability analysis of slopes with incomplete probability information[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, 35(6): 1027—1034.
- [6] AKAIKE H. A new look at the statistical model identification[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, 19(6): 716—723.
- [7] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 基于 Bootstrap 方法的岩土体参数联合分布模型识别[J]. 岩土力学, 2015, 36(4): 913—922.
TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Bootstrap method for joint probability distribution identification of correlated geotechnical parameters[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, 36(4): 913—922.
- [8] EFRON B. Bootstrap methods: Another look at the jackknife[J]. *The Annals of Statistics*, 1979, 7(1): 1—26.
- [9] MOST T, KNABE T. Reliability analysis of the bearing failure problem considering uncertain stochastic parameters[J]. *Computers and Geotechnics*, 2010, 37(3): 299—310.
- [10] LUO Z, ATAMTURKTUR S, JUANG C H. Bootstrapping for characterizing the effect of uncertainty in sample statistics for braced excavations[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2013, 139(1): 13—23.